

جمهوری اسلامی ایران
اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران
اداره آموزش و پرورش منطقه هفت تهران



ساعت امتحان:
وقت امتحان: ۱۰۰ دقیقه
تاریخ امتحان: ۱۳۹۳/۱۰/۱۷
تعداد برگ سوال: یک برگ

نوبت امتحانی: دی ماه
رشته: ریاضی
سال تحصیلی: ۹۴ - ۹۳

نام واحد آموزشی: دبیرستان غیر دولتی هاتف (دوره دوم)
نام و نام خانوادگی: پایه: سوم
امتحان درس: جبر و احتمال نام دبیر: آقای ارشدی

۳

۱- با استفاده از اصل استقرای ریاضی ثابت کنید:

$$\text{الف) } 2^n [1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)](n!) = (2n)! \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\text{ب) } 4^n + 6n - 1 = 9m \quad (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$$

۲

۲- با استدلال استتجاجی ثابت کنید اگر a فرد باشد و مضرب ۳ نباشد، آنگاه $a^2 + 23$ بر ۲۴ بخشپذیر است.

۱۵

$$\text{۳- اگر } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ باشند ثابت کنید: } \frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

۲

۴- سه نقطه A, B, C را در یک امتداد چنان اختیار می کنیم که $AB = 1$ و $BC = \sqrt{2}$ ثابت کنید هر نقطه ای از صفحه حداقل از یکی از این سه نقطه فاصله ای گنگ دارد.

۱۵

۵- $(n+1)$ عدد طبیعی از مجموعه $A = \{1, 2, \dots, 2n\}$ انتخاب شده اند. ثابت کنید حداقل دو عدد از میان اعداد انتخاب شده، نسبت به هم اولند.

۳

۶- با استفاده از جبر مجموعه ها ثابت کنید:

$$\text{الف) } A \cup (A \cap B) = A$$

$$\text{ب) } (A \cap B) - (A \cap C) = A \cap (B - C)$$

$$\text{ج) } A' \Delta B' = A \Delta B$$

۲

۷- اگر A, B, C سه مجموعه دلخواه باشند بطوریکه $(A \cap B') \subseteq C$ و $(A' \cup B) \subseteq C$ نشان دهید: $A - C = \emptyset$

۳

۸- الف) ثابت کنید: $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B)^2$

ب) اگر A و B مجموعه های پنج عضوی باشند که ۳ عضو مشترک دارند. مجموعه $(A \times B) \cup (B \times A)$ چند عضو دارد.

ج) اگر $A = [-1, 1]$ و $B = [-2, 2]$ نمودار $(A \times B) \cap (B \times A)$ را رسم کنید.

۱

۹- مجموعه $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ را در یک دستگاه مختصات مشخص کنید.

۱

۱۰- اگر $A_n = (-1/n, 1/n)$ باشد مجموعه $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ را مشخص کنید.

پاسخنامه سفید داده شود

پاسخ سوالات در روی برگ سوال نوشته شود، نیاز به پاسخنامه سفید ندارد.